Polynômes symétriques, Newton ...

Prop (relations coefficients racines).

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = a_n (X - x_1) \dots (X - x_n)$

[RW 316] Alors $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$

où $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$.

Dém: il suffit de développer et identifier.

Prop:

- [RW 317]
- [Szp 561]

$S_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ (x_i racines de P).

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(n-k) a_{n-k} = a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \dots + a_{n-k} S_0$.

formules différentes pour $k \geq n$ [Szp]

Dém: division euclidienne de polynôme, DES, polynôme dérivé.

Appl: A nilpotente ssi $tr(A^k) = 0 \ \forall k$. ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

Dém: $\Longrightarrow$ $A = P \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \leadsto A^k = P \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

$\leadsto tr(A^k) = 0 \ \forall k$.

$\Longleftarrow$ $A = P \begin{pmatrix} d_1 & * \\ 0 & d_n \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad A^k = P \begin{pmatrix} d_1^k & * \\ 0 & d_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

$Tr(A^k) = \sum\limits_{i=1}^n d_i^k \qquad \chi_A = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$.

$Tr(A^k) = S_k$.

- $n a_n = a_n S_0$ "n". $a_n = 1$.
- $(n-1) a_{n-1} = a_n S_1 + a_{n-1} S_0 = 1.0 + a_{n-1}.n$.

  $\leadsto a_{n-1} = 0$.
- Par récurrence, $\chi_A = X^n$. A nilp $\blacksquare$

[S2p559]

Théorème :

A anneau commutatif, $P(X_1,..,X_n) \in A[X_1,..,X_n]$ un polynôme symétrique de degré d. Alors il existe un polynôme $Q(T_1,..,T_n)$ de poids $\omega(Q) \leq d$ tq $P(X_1,..,X_n) = Q(\sigma_1(X_1,..,X_n),..,\sigma_n(..))$
Ce polynôme est unique.

Rappel : . poids de $X_1^{c_1} X_2^{c_2} .. X_n^{c_n}$: $\omega = 1.c_1 + 2.c_2 + .. + n c_n$.
. le poids d'un poly est le max des poids des monômes.

Ecriture effective :

1. P un poly sym. Ecrire P comme ceci : $P = \sum_{i=1}^{m} a_i S(\mu_i)$
où $S(\mu) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(\mu)$, et μ_i des monômes monotones, c'est-à-dire

de la forme $X_1^{i_1} .. X_n^{i_n}$ avec $i_1 \geq i_2 \geq .. \geq i_n \geq 0$.
Ex. $P = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - X_1^2X_2^2 - X_1^2X_3^2 - X_2^2X_3^2$
$= S(X_1^4) - S(X_1^2X_2^2)$

2. Pour chaque monôme μ_i, écrire $S(\mu_i) = g_{\mu_i} + \sum_{w \in M_{\mu_i}} b_w g_w$

où $\mu_i = X_1^{i_1} .. X_n^{i_n}$; $g_{\mu_i} = s_1^{i_1 - i_2} s_2^{i_2 - i_3} .. s_n^{i_n}$
M_{μ_i} est l'ens des monômes monotones $w = X_1^{j_1} .. X_n^{j_n}$ tq
$\mu_i > w$ et $j_1 + .. + j_n = i_1 + .. + i_n$.
Ex : . $\mu_1 = X_1^4$. $g_{\mu_1} = s_1^4$
$M_{\mu_1} = \{X_1^3X_2 ; X_1^2X_2X_3 ; X_1^2X_2^2\}$
$g_{X_1^3X_2} = s_1^2 s_2$; $g_{X_1^2X_2X_3} = s_1 s_3$; $g_{X_1^2X_2^2} = s_2^2$
$S(X_1^4) = s_1^4 + a_1 s_1^2 s_2 + a_2 s_1 s_3 + a_3 s_2^2$ (a_i à déterminer)
. De même, $S(X_1^2X_2^2) = s_2^2 + b_1 s_1 s_3$ (b_1 à déterminer)

3. Déterminer les coeff en évaluant en des points simples et en utilisant les formules de Viète.

Ex: ▸ $X_1 = X_2 = 1 \quad X_3 = 0 \quad S(X_1^4) = 2$

$s_1(X_1, X_1, X_3) = 2 \; ; s_2 = 1 \; ; s_3 = 0$

$\rightsquigarrow 2 = 2^4 + a_1 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 0 + a_3 1^2$

$4a_1 + a_3 = -14$

• $X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 0 \qquad S(X_1^4) = 1 + 1 = 2$

$s_1 = 0 \; ; s_2 = -1 \; , s_3 = 0$

$2 = a_3$

$\rightsquigarrow 4a_1 + 2 = -14 \qquad a_1 = -4$

• $X_1 = X_2 = X_3 = 1 \quad S(X_1^4) = 3 \qquad s_1 = s_2 = 3 \quad s_3 = 1$

$3 = 3^4 - 4\,3^2 3 + a_2 3 + 2 \cdot 3^2$

$3 = 81 - 108 + 3a_2 + 18$

$3a_2 = 27 + 3 - 18 \qquad 3a_2 = 12 \quad a_2 = 4$

$\Longrightarrow S(X_1^4) = s_1^4 - 4 s_1^2 s_2 + 4 s_1 s_3 + 2 s_2^2$

▹ $X_1 = X_2 = X_3 = 1 \quad S(X_1^2 X_2^2) = 3$

$s_1 = s_2 = 3 \qquad s_3 = 1$

$3 = 3^2 + b_1 3 \qquad 3b_1 = 3 - 9 = -6 \quad b_1 = -2$

$\Longrightarrow S(X_1^2 X_2^2) = s_2^2 - 2 s_1 s_3$

Bilan: $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - X_1^2 X_2^2 - X_1^2 X_3^2 - X_2^2 X_3^2 = s_1^4 - 4 s_1^2 s_2 + 2 s_1 s_3 + 3 s_2^2$